KONCEPCJA WARTOŚCI ZAGROŻONEJ VaR (VALUE AT RISK)

Katarzyna Kuziak
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Katedra Inwestycji Finansowych i Ubezpieczeń

Wprowadzenie

W 1994 roku instytucja finansowa JP Morgan opublikowała metodologię zarządzania ryzykiem RiskMetrics, służącą m.in. do obliczaniu Value at Risk (VaR). Obecnie VaR jest najpopularniejszym rozwiązaniem, jeśli chodzi o pomiar ryzyka rynkowego, ale jest również stosowana do innych rodzajów ryzyka, tj. kredytowego i operacyjnego. Jest to w pewnym sensie uniwersalna miara ryzyka, ponieważ daje możliwość wyrażenia ryzyka różnych pozycji przyjmowanych na rynku finansowym w sposób jednolity. Kluczowym problemem, z punktu widzenia praktyki, jest wybór metody szacowania VaR. W pracy przedstawione zostaną:

- metody szacowania VaR,
- zalety i wady VaR.

Miara VaR jest najpopularniejszą miarą ryzyka w grupie miar zagrożenia, ma duże walory interpretacyjne i jest zalecana przez instytucje nadzoru do pomiaru ryzyka instytucji finansowych. Wykorzystywana jest także do pomiaru innych niż ryzyko rynkowe rodzajów ryzyka finansowego. Jest podstawą dla innych miar ryzyka, służących analizowaniu ryzyka przedsiębiorstwa. Są to miary zagrożenia, takie jak np.: EaR (*Earnings at Risk*), EPSaR (*Earnings Per Share at Risk*), CFaR (*Cash Flow at Risk*), CCFaR (*Credit Cash Flow at Risk*) czy LaR (*Liquidity at Risk*).

Definicja wartości zagrożonej VaR

Value at Risk jest to strata wartości rynkowej (instrumentu finansowego, portfela, instytucji) taka, że prawdopodobieństwo osiągnięcia jej lub przekroczenia w zadanym przedziale czasowym jest równe zadanemu poziomowi tolerancji. Jeśli np. zadany przedział czasowy wynosi dzień i zadany poziom tolerancji wynosi 0,05, zaś VaR portfela wynosi 0,7 mln PLN, oznacza to, że prawdopodobieństwo straty (spadku wartości portfela) w ciągu dnia równej lub większej niż 0,7 mln PLN jest równe 0,05 (czyli jest niewielkie) [5]. Z definicji tej wynika, że VaR zależy od dwóch parametrów, które powinny zostać określone przez decydenta (zarząd). Są to:

- horyzont czasowy (np. banki stosują 1 dzień, fundusze inwestycyjne i niektóre przedsiębiorstwa 1 miesiąc);

- poziom tolerancji (np. JP Morgan stosuje 0,05, Komitet Bazylejski do Spraw Nadzoru Bankowego zaleca 0,01).

Zamiast poziomu tolerancji (jest bliski 0) rozważa się również poziom ufności, który stanowi różnicę między 1 (100%) a poziomem tolerancji.

Należy pamiętać o następujących zasadach:

1. Im niższy poziom tolerancji, tym większa wartość VaR.
2. Im dłuższy horyzont czasowy, tym większa wartość VaR.

Zauważmy, że VaR jest funkcją odpowiedniego kwantyla rozkładu wartości portfela. Im niższy poziom tolerancji, tym wyższa jest wartość VaR, a im dłuższy jest rozpatrywany przedział czasowy, tym wyższa jest wartość VaR.

Formalnie VaR można określić następująco:

$$P(W \leq W_0 - VaR) = \alpha \qquad (1)$$

gdzie:

W_0 – obecna wartość portfela;

W – wartość portfela na końcu okresu, jest to zmienna losowa;

α – poziom tolerancji (prawdopodobieństwo bliskie 0, z reguły 0,01 lub 0,05).

Oznaczmy kwantyl rozkładu wartości odpowiadający zadanemu prawdopodobieństwu przez W_α. Wtedy mamy:

$$P(W \leq W_\alpha) = \alpha \ , \qquad (2)$$

czyli otrzymujemy:

$$W_\alpha = W_0 - VaR \ . \qquad (3)$$

Często analiza ryzyka prowadzona jest nie dla wartości, lecz dla stóp zwrotu. Oznaczmy kwantyl rozkładu stóp zwrotu odpowiadający zadanemu prawdopodobieństwu przez R_α.

Wówczas otrzymujemy:

$$P(R \leq R_\alpha) = \alpha \ . \qquad (4)$$

Stopa zwrotu (przy kapitalizacji okresowej) jest określona jako:

$$R_\alpha = \frac{W_\alpha - W_0}{W_0} \qquad (5)$$

Po przekształceniu (5) i podstawieniu do (3), po przekształceniach otrzymujemy:

$$VaR = -R_\alpha W_0 \ . \qquad (6)$$

Ponieważ kwantyl rozkładu stopy zwrotu odpowiadający małemu prawdopodobieństwu jest z reguły ujemny, zatem VaR we wzorze (6) przyjmuje z reguły wartość dodatnią.

Z powyższego wzoru wynika, że podstawowym parametrem niezbędnym do określenia VaR jest kwantyl rozkładu stóp zwrotu.

Metody szacowania VaR

Szacowanie VaR jest istotnym problemem praktycznym, który nie doczekał się uniwersalnego rozwiązania. Często stosuje się następujące metody:

- podejście wariancji–kowariancji,
- symulacja historyczna,
- symulacja Monte Carlo,
- podejście wyznaczania kwantyla dowolnego rozkładu,
- podejście oparte na teorii wartości ekstremalnych,
- podejście oparte na wykorzystaniu wartości pochodzących z ogona rozkładu.

Podejście wariancji–kowariancji

W podejściu wariancji–kowariancji zakłada się, że rozkład stóp zwrotu jest wielowymiarowym rozkładem normalnym. W takiej sytuacji kwantyl jest funkcją średniej i odchylenia standardowego rozkładu stóp zwrotu:

$$R_\alpha = \mu - k\sigma \,, \tag{7}$$

gdzie:

μ – średnia rozkładu stopy zwrotu;

σ – odchylenie standardowe rozkładu stopy zwrotu;

k – stała, zależna od prawdopodobieństwa, np. gdy $1–\alpha=0,95$, $k=1,65$; gdy $1–\alpha=0,99$, $k=2,33$.

Z (6) i (7) wynika, że:

$$VaR = (k\sigma - \mu)W_0 \,. \tag{8}$$

Value at Risk można wyznaczać również dla portfela instrumentów finansowych. Załóżmy, że wielowymiarowy rozkład stóp zwrotu składników portfela jest wielowymiarowym rozkładem normalnym o wektorze średnich i macierzy kowariancji danych jako:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ .. \\ \mu_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & .. & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & .. & \sigma_{2m} \\ .. & .. & .. & .. \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & .. & \sigma_{mm} \end{bmatrix},$$

gdzie m jest liczbą składników portfela.

Natomiast zależności łączące średnią i odchylenie standardowe rozkładu stopy zwrotu portfela ze średnimi i odchyleniami standardowymi rozkładów stóp zwrotu składowych instrumentów finansowych można zapisać następująco:

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} w_i \mu_i \tag{9}$$

oraz:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} w_i w_j \sigma_{ij} \ , \tag{10}$$

gdzie w_i oznacza udział *i*-tego składnika w portfelu.

Po podstawieniu (9) i (10) do (7) lub (8) otrzymujemy wartość VaR.

W tym przypadku pojawia się problem oszacowania parametrów rozkładów stóp zwrotu, z reguły na podstawie danych historycznych. Badania empiryczne przeprowadzone na wielu rynkach wskazują, że rozkłady stóp zwrotu odbiegają od normalnego, a zatem podejście to należy stosować z pewną ostrożnością [6].

Symulacja historyczna

Symulacja historyczna polega na tym, że w odniesieniu do rozpatrywanego portfela instrumentów finansowych stosuje się stopy zwrotu obliczone na podstawie danych historycznych, np. z ostatnich 200 lub 250 dni. Otrzymuje się zatem tyle obserwacji dotyczących stopy zwrotu portfela, ile danych wzięto pod uwagę, według wzoru:

$$R_t = \sum_{i=1}^{m} w_i R_{it}$$

W ten sposób wygenerowany zostaje rozkład statystyczny stóp zwrotu. Wyznaczenie kwantyla tego rozkładu pozwala na określenie VaR bezpośrednio z definicji, stosując wzory (2) i (4).

Główną zaletą symulacji historycznej jest fakt, że jest to podejście nieparametryczne. Oznacza to, że nie ma tu ograniczeń wynikających z konieczności przyjęcia założenia normalności oraz unika się szacowania parametrów (takich jak np. średnia czy odchylenie standardowe) na podstawie danych historycznych [6].

Symulacja Monte Carlo

W symulacji Monte Carlo przyjmuje się pewien hipotetyczny model, który najlepiej opisuje mechanizm kształtowania się cen (lub stóp zwrotu) instrumentów finansowych. Zaleca się, aby ten model był wcześniej zweryfikowany na wielu danych empirycznych. Następnie generuje się wiele (np. kilka tysięcy) obserwacji stóp zwrotu instrumentów finansowych, otrzymując w ten sposób rozkład stóp zwrotu portfela. Wyznaczenie kwantyla tego rozkładu pozwala na określenie VaR bezpośrednio z definicji, stosując wzory (2) i (4) [6].

Precyzując powyższą ideę w wyznaczaniu VaR można wyróżnić następujące etapy:

1. Wybór procesu stochastycznego i parametrów.
2. Wygenerowanie ciągu liczb pseudolosowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ które służą do obliczenia cen $S_{t+1}, S_{t+2}, \ldots, S_{t+n}$.
3. Obliczenie wartości aktywów $F_{t+n} = F_T$ w oparciu o ciąg cen w momencie *T*.
4. Powtarzanie kroków 2 i 3 wiele razy (np. 10 tys. razy). W efekcie otrzymamy rozkład wartości $F_T^1, \ldots, F_T^{10000}$, z którego będzie wyznaczony kwantyl – Value at Risk na ustalonym poziomie istotności, np. 0.05.

Zasadniczym problemem jest w tym przypadku określenie modeli dla poszczególnych instrumentów finansowych.

Przykład dla akcji

W odniesieniu do akcji często zakłada się, że proces ich cen jest geometrycznym ruchem Browna:

$$\mathrm{dS_t} = \mu_t S_t \mathrm{dt} + \sigma_t S_t dW_t,$$

gdzie:

S_t – cena akcji w momencie *t*;

μ_t – dryf w momencie *t*;

σ_t – zmienność w momencie *t*; $dW \sim \mathrm{N}(0, \sqrt{dt})$;

lub w wersji dyskretnej:

$$\Delta S_t = S_{t-1}(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}), \qquad \varepsilon \sim \mathrm{N}(0,1).$$

W takim wypadku etapy procedury są następujące:

1. zadawany jest punkt startowy S_t.
2. generowany jest ciąg ε_i dla $i = 1,...,n$.
3. $S_{t+1} = S_t + S_t(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t})$.
4. $S_{t+2} = S_{t+1} + S_{t+1}(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t})$.
5. i tak dalej, aż do $S_{t+n} = S_T$.

Podejście wyznaczania kwantyla dowolnego rozkładu

Jest to wariant bardziej ogólnego podejścia w porównaniu do podejścia wariancji–kowariancji, ponieważ VaR można określić na podstawie kwantyla dowolnego, zadanego rozkładu. W tej sytuacji należy na podstawie danych historycznych oszacować parametry rozkładu, a następnie wyznaczyć kwantyl (jeśli istnieje prosty sposób przedstawienia tego kwantyla jako funkcji parametrów rozkładu).

Zasadniczym problemem jest w tym przypadku określenie postaci rozkładu. Wydaje się, że dość obiecującą klasą rozkładów są rozkłady stabilne (są to uogólnienia rozkładu normalnego). Mandelbrot (por. [12]) zaproponował zastosowanie tych rozkładów do analizy stóp zwrotu. Rodzina rozkładów stabilnych jest bardzo szeroka, dlatego rokuje duże nadzieje, jeśli chodzi o jej przydatność jako rozkładów stóp zwrotu. Pojawiają się jednak problemy z wnioskowaniem statystycznym dla tych rozkładów [6].

Podejście oparte na teorii wartości ekstremalnych

Podejście to prowadzi w sposób pośredni do określenia VaR. Nie oblicza się tutaj bezpośrednio kwantyla rozkładu stóp zwrotu, natomiast dąży się do określenia wartości ekstremalnej rozkładu, np. określenia maksymalnej straty. Podejście to wywodzi się z teorii wartości ekstremalnych (por. np. [2]). Jednym z ważniejszych elementów tej teorii jest twierdzenie, które głosi, że maksimum zbioru zmiennych losowych (np. stóp zwrotu) ma rozkład graniczny należący do klasy tzw. uogólnionych rozkładów wartości ekstremalnych (*Generalized Extreme Value Distributions*), których postać jest znana (por. np. Jajuga (2000)). Do tej klasy rozkładów zalicza się np. rozkłady Frécheta, Weibulla i Gumbela. Można wykazać, że kwantyl rozkładu maksymalnej straty określony jest wzorem:

$$y = \mu - \frac{\sigma}{\xi}[1 - [-\ln(1-\alpha)]^{-\xi}]$$

gdzie:

y – kwantyl,

μ, σ, ξ – parametry rozkładu.

Istotnym problemem jest w tym przypadku oszacowanie przedstawionych trzech parametrów rozkładu maksymalnej straty, co można uczynić na przykład za pomocą metody największej wiarygodności [6].

Podejście oparte na wykorzystaniu wartości pochodzących z ogona rozkładu

Wszystkie przedstawione metody szacowania VaR wykorzystywały cały zbiór obserwacji. Jednak VaR dotyczy w istocie sytuacji ekstremalnych. Zatem przy szacowaniu dobrze by było wykorzystywać przede wszystkim obserwacje pochodzące z ogona rozkładu. Zastosowanie klasycznych metod estymacji pogarsza niestety statystyczną jakość oszacowań (z uwagi na małą liczbę wykorzystywanych obserwacji). Pewnym kompromisem jest podejście zaproponowane przez McNeila (por. [13]). Wykorzystuje on znany w teorii wartości ekstremalnych fakt, że obserwacje z ogona rozkładu mogą być dobrze przybliżone za pomocą tzw. uogólnionych rozkładów Pareto (por. np. [2]).

W rezultacie proponowany estymator VaR łączy metodę największej wiarygodności dla uogólnionego rozkładu Pareto z klasyczną metodą określenia udziału obserwacji z ogona w ogólnej liczbie obserwacji [13]:

$$VaR = u + \frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\xi} - 1\right) \ ,$$

gdzie:

u – przyjęty próg dla wyboru obserwacji pochodzących z ogona rozkładu,

N_u – liczba obserwacji pochodzących z ogona (powyżej progu),

β, ξ – parametry uogólnionego rozkładu Pareto (szacowane metodą największej wiarygodności).

Tabela 1. Podsumowanie metod szacowania VaR

Metoda	Zalety	Wady
Podejście wariancji–kowariancji	Prostota	Przyjęcie założenia rozkładu normalnego; problem oszacowania średniej i wariancji na podstawie danych z przeszłości
Symulacja historyczna	Metoda nieparametryczna	Problem z otrzymaniem jednorodnych danych historycznych; wrażliwość otrzymanych wyników na zbiory danych zastosowane w obliczeniach; konieczność ustalenia długości okresu, z którego mają pochodzić dane
Symulacja Monte Carlo	Duża dokładność; stosuje się wówczas, gdy nie ma możliwości wykorzystania innych podejść	Duża zależność wyników od przyjętego modelu cen (stóp zwrotu)
Wyznaczanie kwantyla dowolnego rozkładu	Wykorzystanie innych rozkładów niż normalny	Problem oszacowania parametrów rozkładu na podstawie danych z przeszłości; trudności ze statystycznym wnioskowaniem dla rozkładów stabilnych
Teoria wartości ekstremalnych	Uwzględnienie nietypowych sytuacji	Problem oszacowania parametrów rozkładu maksymalnej straty
Wartości pochodzące z ogona rozkładu	Wykorzystuje obserwacje pochodzące tylko z ogona rozkładu	Stosowanie klasycznych metod estymacji pogarsza jakość oszacowań; problem ustalenia wartości progu tzw. u

Źródło: opracowano na podstawie [6]

Tabela 1 zawiera syntetyczne zestawienie wad i zalet omówionych metod. Nie są to jedyne metody szacowania wartości zagrożonej. Na przykład Maksymiuk (por. [11]) przedstawił metodę symulacji opartą na pewnej, niezbyt dużej liczbie scenariuszy. Hull (por. [4]) przedstawia inne metody, przydatne zwłaszcza dla portfeli instrumentów, w szczególności uwzględniającą skośność rozkładu metodę opartą na rozwinięciu Cornisha-Fishera. Szersza dyskusja na temat różnych metod szacowania VaR przedstawiona jest w pracach Joriona (por. [10]) i Dowda (por. [1]). Również w tych pracach omawiane jest istotne zagadnienie przedziałów ufności dla VaR, bowiem VaR szacuje się na podstawie obserwacji z przeszłości [6].

Zalety i wady VaR

Koncepcja pomiaru ryzyka, jaką jest wartość zagrożona, jest atrakcyjna dla instytucji, ale nie oznacza to, że konstrukcja i wykorzystywanie modeli szacowania wartości zagrożonej nie nastręczają w praktyce żadnych trudności. Przyjrzymy się teraz zaletom i wadom koncepcji VaR.

Zalety VaR

Zalety wartości zagrożonej można ująć następująco:

- uniwersalność – ta sama koncepcja pomiaru ryzyka rynkowego jest wykorzystywana właściwie dla wszystkich rodzajów pozycji przyjmowanych przez jednostkę, jak również ta sama koncepcja pomiaru ryzyka może być stosowana do pomiaru innych rodzajów ryzyka, np. ryzyka kredytowego czy operacyjnego (oczywiście techniki szacowania wartości zagrożonej są różne w każdym przypadku, ale ryzyko zostaje wyrażone w sposób jednolity), ułatwia to porównania i tworzenie zagregowanych miar ryzyka;
- określa prawdopodobieństwo wystąpienia ustalonej zmiany wartości czynnika ryzyka (inne miary ryzyka, np. zmienności czy wrażliwości, tego nie określają);
- wyraża ryzyko w sposób łatwy do zinterpretowania (jako maksymalną możliwą do poniesienia stratę mierzoną w jednostkach pieniężnych);
- może być stosowana do określenia zabezpieczenia kapitałowego instytucji;
- uwzględnia efekt dywersyfikacji portfela;
- popularność – w 1994 r. instytucja finansowa JP Morgan ujawniła stosowany przez nią system zarządzania ryzykiem rynkowym Risk Metrics, w 1997 r. system CreditMetrics, a w 1999 r. CorporateMetrics, poza tym jest rekomendowana przez instytucje nadzorcze, takie jak: Grupa Trzydziestu (Group of Thirty, por. [3]), Komitet Bazylejski do Spraw Nadzoru Bankowego, w Polsce zaleca ją Generalny Inspektorat Nadzoru Bankowego.

Wady VaR

Do wad wartości zagrożonej zaliczyć można następujące:

- określa stratę spowodowaną „normalnym” funkcjonowaniem rynku, przy określonych założeniach (czas, poziom tolerancji), a zatem jeśli warunki rynkowe zmienią się gwałtownie, VaR będzie bezużyteczna;
- nie określa, jak wysokie będą straty, jeśli wartość VaR zostanie przekroczona;

- nie jest koherentną miarą ryzyka w ogólnym przypadku, tj. gdy stopa zwrotu z portfela ma inny rozkład niż wielowymiarowy normalny czy inny wielowymiarowy rozkład eliptyczny;
- trudności w dokładnym oszacowaniu, zwłaszcza dla złożonych portfeli;
- wyniki oszacowań wrażliwe są na metodę estymacji.

Podsumowanie

Szacowanie wartości zagrożonej nie jest zagadnieniem prostym, szczególnie w przypadku wielowymiarowym. Wszystkie opisane wcześniej metody szacowania wartości zagrożonej użytkownik może oprogramować samodzielnie w języku *STATISTICA Visual Basic* (*SVB*). Natomiast w przypadku niektórych z nich można posłużyć się standardowymi modułami pakietu *STATISTICA 6.1*:

- podejście wariancji–kowariancji (rozkład normalny) – *Dopasowanie rozkładów*;
- podejście wyznaczania kwantyla dowolnego rozkładu – *Dopasowanie rozkładów* (dla niektórych rozkładów);
- podejście oparte na teorii wartości ekstremalnych dla rozkładu Weibulla – *Analiza procesu*.

Literatura

1. Dowd K.: *Beyond Value at Risk. The new science of risk management*. Wiley, Chichester, 1998.
2. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.: *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer, Berlin, 1997.
3. Group of Thirty: *Derivatives: practices and principles*. Washington, 1993.
4. Hull J.: *Options, futures and other derivatives*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
5. Jajuga K.: *Miary ryzyka rynkowego – część trzecia*. Rynek Terminowy nr 8, 2000, s. 112-117.
6. Jajuga K.: *Value at Risk*. Rynek Terminowy nr 13, 2001, s. 18-20.
7. Jajuga K., Kuziak K., Papla D.: *Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego – część I*. Rynek Terminowy nr 10, 2000, s. 121-124.
8. Jajuga K., Kuziak K., Papla D.: *Ryzyko rynkowe polskiego rynku akcji – Value at Risk i inne metody pomiaru*. US Materiały Konferencje nr 53, Rynek Kapitałowy. Skuteczne Inwestowanie. Cz. I, Szczecin 2000, s. 49-68.
9. Jajuga K., Kuziak K., Papla D., Rokita R.: *Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego – część II*. Rynek Terminowy nr 11, 2001, s. 133-140.
10. Jorion P.: *Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw-Hill, New York 1995.

11. Maksymiuk R.: *Zarządzanie ryzykiem: Value at Risk*. Rynek Terminowy nr 2, 1998, s. 74-76.
12. Mandelbrot B.: *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business, 26, 1963, s. 394-419.
13. McNeil A.: *Extreme Value Theory for risk managers*. Maszynopis, ETHZ, Zürich, 1999.
14. Stawczyk A.: *Wprowadzenie do metodologii pomiaru ryzyka – Value at Risk*. Rynek Terminowy nr 6, 1999, s.132-137.